UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Computación y T. I.
Estructuras Discretas III (CI-2527) Ene-Mar 2022
Prof.: S, Carrasquel

Práctica 04
Grupos Cíclicos

1. Demuestre que todo grupo cíclico finito es isomorfo a $\mathbb{Z}_n$
2. Demuestre que todo grupo cíclico infinito es isomorfo a $\mathbb{Z}$
3. Dé los órdenes de cada elemento de los siguientes grupos:
   (a) Los enteros módulo 3
   (b) Los enteros módulo 4
   (c) El grupo aditivo de los múltiplos de 5
4. Sea $\langle G, *\rangle$ un grupo cíclico, $|G| = n$, $(n > 1)$, sea $a \in G$ generador de G. Demuestre las siguientes proposiciones
   (a) Sea $d \in \mathbb{Z}^+$, con $d \neq 1$ si $d|n$ entonces a^d no genera a G
   (b) Sea $d \in \mathbb{N}$ si $(d, n) = 1$ entonces a^d es generador de G
5. Halle todos los generadores de los siguientes grupos:

   $\langle \mathbb{Z}_{21}, +_{21}\rangle$ $\langle \mathbb{Z}_{25}, +_{25}\rangle$

   $\langle \mathbb{Z}_{17}, +_{17}\rangle$ $\langle \mathbb{Z}_{p}, +_{p}\rangle$

6. Sea $G = \langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus \rangle$ (este grupo es isomorfo al grupo aditivo de los enteros módulo 6) donde $\oplus$ se define como
   $$\left\langle \overline{a}, \overline{b}\right\rangle \oplus \left\langle \overline{c}, \overline{d}\right\rangle = \left\langle \overline{a} \oplus_2 \overline{c}, \overline{b} \oplus_3 \overline{d}\right\rangle$$
   (a) Halle un homomorfismo entre $G = \langle \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, \oplus \rangle$ y $\mathbb{Z}_6$
   (b) Indique el elemento identidad de G.
   (c) Indique la forma del elemento inverso de $\left\langle \overline{a}, \overline{b}\right\rangle \in G$
7. Demuestre que *Cualquier grupo de orden primo es cíclico.*
8. Sea G el grupo de números complejos $C = \{1, -1, i, -i\}$, con el producto usual. Demuestre que G es isomorfo a $\langle \mathbb{Z}_4, +\rangle$ encontrando explícitamente el isomorfismo.